

Е.В. Калганков, аспирант,
А.В. Новикова, магистр, мл. научн. сотр.
(ИГТМ НАН Украины)

К ЗАДАЧЕ ОБ УДАРЕ ШАРА О ВЯЗКО-УПРУГУЮ ПЛОСКОСТЬ

Аннотация. Для определения напряжённо-деформированного состояния вязко-упругой плоскости при взаимодействии с металлическим шаром использовалась модель Герца – Динника. Контактная задача решалась с помощью МКЭ; алгоритм решения сводился к последующему выполнению шагов согласно программе МИРЕЛА+. Результаты расчётов сравнивались с экспериментальными данными.

Ключевые слова: удар, резиновая футеровка, метод конечных элементов

Ye.V. Kalgankov, Ph. D. Student,
A.V. Novikova, M. S. (Tech.), Junior Researcher
(IGTM NAS of Ukraine)

THE PROBLEM OF BALL KICK ON VISCOELASTIC PLANE

Abstract. We use the model by Gertz – Dinnik for stress-strain state determination of viscoelastic plane while interacting with metallic ball. Contact problem is solved by finite elements method; algorithm for solving the problem is reduced to subsequent fulfillment of steps according to the program MIRELA+. The calculation results are compared with experimental data.

Keywords: kick, rubber lining, finite elements method

Известно [1-5], что в шаровых рудоизмельчительных мельницах основным фактором разрушения защитных футеровок является абразивный или абразивно-усталостный износ, обусловленный в том числе и ударами соприкасаемых тел. Для резиновой футеровки преобладающим является абразивно-усталостный износ, для металлических – абразивный износ; удар и вдавливание при оптимальных параметрах элементов защитных футеровок играют второстепенную роль. Тем не менее, и ударные нагрузки, и вдавливание соприкасаемых тел вносят определённый вклад в общий механизм разрушения футеровок. Поэтому на первом этапе применения резиновых футеровок в горном машиностроении многие авторы уделяли этим исследованиям большое внимание и получили весьма важные результаты. Эти результаты были использованы для выбора параметров элементов резиновой футеровки, например, выбора толщины футеровочных плит, и для определения допускаемых напряжений в материале футеровки.

Ниже рассмотрим процессы удара и вдавливания при взаимодействии футеровки с нагрузкой с акцентацией внимания на результатах сравнения поведения резиновой и металлической футеровок.

Взаимодействие отдельных элементов (шары, куски руды) внутримельничной нагрузки будем моделировать системой «шар-плоскость». Рассмотрим три основных модели, наиболее полно характеризующих эту систему.

Модель Герца – Динника для удара шара о плоскость.

История этой модели восходит к временам Ньютона, Сен-Венана и Герца; позже она была развита в работах А.Н. Динника и С.П. Тимошенко.

Применительно к рассматриваемому случаю наиболее удобно исследовать прямой центральный удар двух упругих тел, т.е. удар шара о тело бесконечно большой массы, ограниченное плоскостью. Такая задача обычно сводится к рас-

смотрению процесса соударения двух материальных точек с находящимся между ними упругим элементом. Этот упругий элемент моделируется пружиной. Такая модель имеет явные недостатки, но на сегодняшний день это, пожалуй, единственная модель, позволяющая исследовать локальные процессы при вдавливании или соударении двух упругих тел. Правильность её подтверждена во многих работах [3, 4].

Рассмотрим прямой центральный удар двух тел массами m_1 и m_2 , движущимися со скоростями V_1 и V_2 . При соприкосновении тел они начнут деформироваться: кинетическая энергия относительного движения шара перейдёт частично в потенциальную энергию деформаций плоскости (т.е. футеровки), частично в энергию упругих волн, в энергию разрушения футеровки, в энергию трения и т.д. Время удара обычно рассматривается как процесс, состоящий из двух актов: первый акт от момента касания тел до момента их наибольшего сжатия t_2 ; второй – от момента наибольшего сжатия t_2 до момента последнего касания t_1 .

По закону сохранения количества движения общая скорость в момент наибольшего сжатия будет

$$V = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}.$$

А.Н. Динник для соударения шара о плоскость приводит следующие выражения:

- для сближения двух тел

$$\alpha = \frac{1}{4} R^5 \sqrt[5]{\frac{100 \pi^2 \rho_1^2 16 (1 - \nu^2) (E_1 + E_2)^2}{E_1^2 E_2^2}} V^{4/5}; \quad (1)$$

- для нормального напряжения

$$\sigma_z = 4 \sqrt[5]{\frac{10 \rho_1 E_1^4 E_2^4}{\pi^4 4^4 (1 - \nu^2)^2 (E_1 + E_2)^4}} V^{2/5}; \quad (2)$$

- для касательного напряжения

$$\tau = 0,7358 R^5 \sqrt[5]{\frac{100 \pi^2 \rho^2 16 (1 - \nu^2)^2 (E_1 + E_2)^2}{E_1^2 E_2^2 \nu}}, \quad (3)$$

где ρ_1 – плотность шара;
 ρ_2 – плотность футеровки;
 R – радиус шара;
 V – скорость удара;
 α – сближение тел;
 σ_z – нормальное напряжение;
 τ – касательное напряжение;
 E_1 и E_2 – модули Юнга шара и футеровки соответственно;
 ν – коэффициент Пуассона.

А.Н. Динник провёл обширные экспериментальные исследования различных материалов в условиях ударных напряжений, в том числе и таких, которые вызывают разрушение плоскости. При этом он отметил весьма важный факт, позже подтверждённый многими исследователями: материалы (в основном метал-

лы) локально могут выдерживать большие напряжения без видимых следов разрушения. Причины такого поведения авторы видят в следующем:

- согласно III теории прочности локальные разрушения материала начнутся тогда, когда касательные напряжения достигнут некоторого максимального значения;
- время удара обычно незначительно и напряжения благодаря релаксационным свойствам материала не успевают проявиться в полной мере.

По теории А.Н. Динника:

главные напряжения в центре удара $\bar{X}_x = \bar{Y}_y = \bar{Z}_z (1 + 2\nu)/2$;

для сжатия металла при $\nu = 0,3$ имеем $\bar{X}_x = \bar{Y}_y = 0,8\bar{Z}_z$;

для резины при $\nu = 0,5$ имеем $\bar{X}_x = \bar{Y}_y = \bar{Z}_z$.

При таких условиях материал может выдержать намного большие напряжения, чем при монофазном сжатии. Следует также отметить, что резина благодаря несжимаемости ($\nu = 0,5$) при ударных нагрузках находится в более благоприятных условиях, чем металлы. Наибольшие касательные напряжения в центре поверхности удара, от которых соответственно и зависит разрушение футеровки, будут равны

$$\bar{T}_{xz} = \bar{T}_{yz} = (\bar{Z}_z - \bar{X}_x)/2 = \bar{Z}_z/10,$$

а при монофазном сжатии наибольшее касательное напряжение на площадке, составляющей угол 45° с напряжением \bar{Z}_z , будет

$$\bar{T} = \bar{Z}_z/2.$$

В этом и заключается одна из причин более высокой стойкости резины к ударным нагрузкам, чем металла.

Рассмотрим расчёт нормальных напряжений σ_z для резиновой футеровки «плита-плита» мельницы МШЦ 3,6×5,5 (Полтавский ГОК). Данные для расчёта: резина 541933-1; шар диаметром 40 мм; скорость удара $V = 10$ м/с; коэффициенты Пуассона: для стали – $\nu = 0,3$, для резины $\nu = 0,499$; модуль упругости стали $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа; модуль упругости резины $E_2 = 9,6$ МПа, объёмный модуль упругости резины $K_2 = 3 \cdot 10^2$ МПа (определяется экспериментально по методике [2]). Расчёт по формуле (2) даёт $\sigma_z = 18,2$ МПа. Для сравнения приведём экспериментальные данные, полученные в [1] при исследовании аналогичной резины при следующих параметрах: скорость удара шара диаметром 60 мм равнялась 12 м/с; экспериментальное значение глубины лунки при ударе равнялось 1,8 мм; в этом случае величины нормальных напряжений $\sigma_z = (18 \div 25)$ МПа. Как видно, совпадение вполне приемлемое. При этом автор [1] рекомендует брать допускаемые напряжения в пределах $(25 \div 28)$ МПа, а допускаемые деформации – $0,25 \div 0,30$.

Вдавливание шара в плоскость. А.Н. Динник для вдавливания шара в плоскость давлением p получил следующие формулы [4]:

- для сближения шара и плоскости

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9p^2(\theta_1 + \theta_2)^2}{256R}}, \quad (4)$$

- для нормального напряжения

$$\sigma_z = \frac{3}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4p}{9R^2(\theta_1 + \theta_2)^2}}, \quad (5)$$

- для радиуса площадки контакта

$$a = \sqrt[3]{3pR(\theta_1 + \theta_2)/16},$$

где $\theta_i = 4(1 - \nu_i^2)/E_i$ ($i = 1, 2$).

Используя эти формулы, для металлического шара ($\nu_1 = 0,3$, $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа) радиусом $R = 20$ мм, вдавливаемого в резиновую футеровку ($\nu_2 = 0,499$, $E_2 = 5,92$ МПа) давлением $p = 0,2$ МПа, получаем $\sigma_z = 19,6$ МПа.

Алгоритм решения контактной задачи МКЭ. Предполагается, что контактируют два тела, одно из них упругое, второе абсолютно жёсткое, которое не деформируется. Алгоритм решения контактной задачи сводится к последовательному выполнению следующих шагов (программа МИРЕЛА+ [5]):

1. На первом шаге нагружения по заданным координатам конструкции $\{x_i\}$, вычисленным вектору перемещений $\{u_i\}$ и компоненте тензора напряжения $\{\sigma_{ij}\}$ вычисляется матрица жёсткости $[K^*]$.

2. Текущее значение параметров нагрузки определяется следующим образом

$$P_n = P_{n-1} + \Delta P_n.$$

3. Из системы линейных алгебраических уравнений

$$\{u_{n-1}\} = [K^*] \{P_{n-1}\}$$

находится вектор перемещений. Начальное приближение искомого решения $\{\Delta u_{n(1)}\}$ находится с помощью экстраполяционной формулы

$$\{\Delta u_{n(1)}\} = \{\Delta u_{n-1}\} \Delta P_n / \Delta P_{n-1}.$$

4. Задаются краевые условия непроникания контактирующих тел. К узловым точкам, которые пересекают границу контакта после нагружения, прикладывается вектор дополнительной нагрузки, который определяется новым вектором перемещений:

$$\{\Delta u_{n(2)}\} = \{\Delta u_{n(1)}\} - \{\Delta v_{n(1)}\},$$

где $\{\Delta u_{n(1)}\}$ – вектор перемещения точек без учёта граничных условий;

$\{\Delta u_{n(2)}\}$ – новый вектор перемещений;

$\{\Delta v_{n(1)}\}$ – вектор перемещений от дополнительной загрузки.

Далее вычисляется вектор дополнительной нагрузки P_n^* как функция от $\{\Delta v_{n(1)}\}$ и суммируется с вектором нагрузки.

5. Приближённое значение перемещений $\{\Delta u_{n(2)}\}$ подставляется в линейные уравнения, определяется вектор узловых невязок $\{R_{n(2)}\}$, численной характеристикой которого является сумма квадратов компонент узловых невязок $\{R^*\}$. Данная величина позволяет судить о сходимости получаемых решений.

6. Оценка вектора узловых невязок $\{R_{n(2)}\}$ определяется следующим образом: принимается, то значение вектора перемещений $\{\Delta u_{n(2)}\}$, при котором выполняется условие:

$$(R_{(2)})^2 < (P_n)^2 \varepsilon, \quad (10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}). \quad (6)$$

7. При выполнении условия (6) вектор $\{R_{n(2)}\}$ принимается за дополнительную нагрузку и подставляется в правую часть системы линейных уравнений.

8. Решается система линейных уравнений, находится приращение нового вектора перемещений $\{\Delta w_{n(1)}\}$ и суммируется с вектором $\{\Delta u_{n(2)}\}$:

$$\{\Delta u_{n(3)}\} = \{\Delta u_{n(2)}\} + \{\Delta w_{n(1)}\}.$$

9. Для нового вектора перемещений $\{\Delta u_{n(3)}\}$ проверяется условие непроникания. Если точки упругого тела снова проникли в жёсткое тело, то для вектора $\{\Delta u_{n(3)}\}$ выполняются пункты 4-8.

10. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия непроникания и условия (6) для текущих значений величины вектора невязок узловых нагрузок.

11. Пересчитываются и значения тензоров деформации и напряжения:

$$\{\varepsilon_{n+1}^{ij}\} = \{\varepsilon_n^{ij}\} + \{\Delta \varepsilon_n^{ij}\};$$

$$\{\sigma_{n+1}^{ij}\} = \{\sigma_n^{ij}\} + \{\Delta \sigma_n^{ij}\}.$$

Результаты расчёта по МКЭ. Изложенный выше алгоритм был применён

для решения контактной задачи для резиновой футеровки, в которую вдавливается металлический шар. Расчётная схема приведена на рис. 1. Были заданы следующие размеры контактирующих тел: $l_1 = 486$ мм, $l_2 = 170$ мм, $h_1 = 50$ мм, $h_2 = 110$ мм, $L = 375$ мм, $d = 40$ мм. Футеровка выполнена из резины, для которой $E = 5,92$ МПа, $\nu = 0,499$. Давление шара на футеровку равно $q = 0,2$ МПа.

Распределение нормальных напряжений σ_{22} показано на рис. 2. Как видно, максимальное по величине напряжение будет в центре поверхности контакта, расчётная величина его равна $\sigma_2 = 19,08$ МПа.

Экспериментальные исследования. Такие исследования проводились на универсальном стенде FP 100/1 с автоматической записью кривой «нагрузка-деформация». Ис-

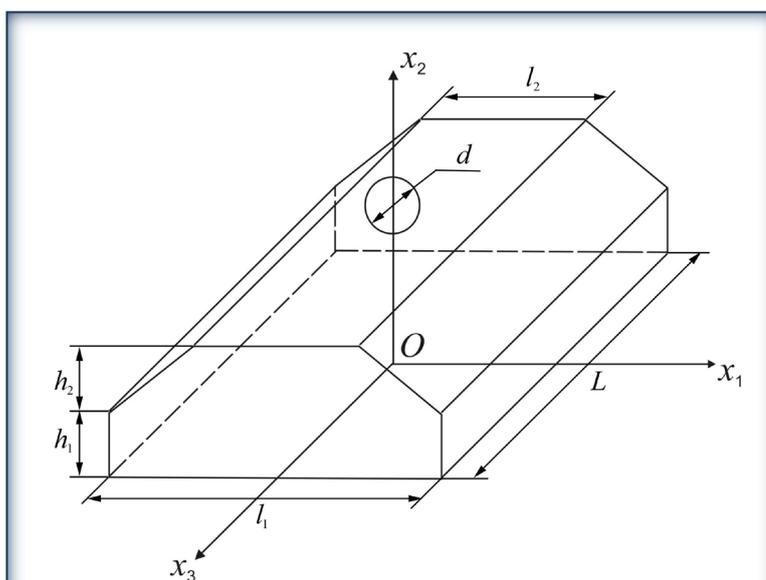


Рис. 1 – Расчётная схема

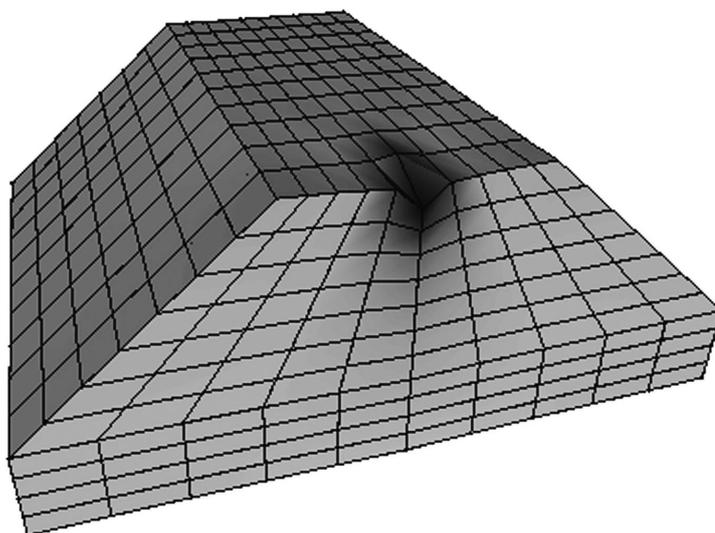


Рис. 2 – Распределение напряжений σ_{22} в футеровке

следованиям подвергались плиты резиновой футеровки типа «плита-плита» мельницы МШЦ 3,6×5,5: толщина плит 160 мм; диаметр контактируемого металлического шара 40 мм; скорость нагружения (скорость сближения шара с футеровочной плитой) $V = 0,2$ м/с; резина 541933-1. В процессе экспериментальных исследований фиксировалось давление p шара на футеровку и сближение контактирующих тел α . Усреднённые экспериментальные данные были следующими: $p = (0,18 \div 0,22)$ МПа; $\alpha = (1,72 \div 1,8)$ см. В этом случае по формуле (5) получаем $\sigma_z = (18,6 \div 20,9)$ МПа.

Как видно, величины нормальных напряжений, полученные по формуле Динника, методом конечных элементов и экспериментальным методом совпадают удовлетворительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прикладная механика упруго-наследственных сред. В 3-х томах / А.Ф. Булат, В.И. Дырда, Е.Л. Звягильский, А.С. Кобец. – К.: Наук. думка, 2012. – Т. 2. Методы расчёта эластомерных деталей. – 2012. – 535 с.
2. Дырда В.И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. – Киев: Наук. думка, 1988. – 239 с.
3. Вибрация в технике в 6 т. / Под ред. Фролова В.К. – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6. – 465 с.
4. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твёрдых тел. Удар. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.
5. Дырда, В.И. Аналитические и численные методы расчёта резиновых деталей / В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк. – Днепропетровск – Запорожье: Запорожский национальный университет, 2012. – 370 с.

REFERENCES

1. Bulat, A.F., Dyrda, V.I., Zvyagilskiy, Ye.L., Kobets, A.S. (2012), *Prikladnaya mekhanika uprugogo-nasledstvennykh sred. Tom 2. Metody raschota elastomernykh detaley* [Applied mechanics of elastic-hereditary media. Vol. 2. Methods for calculating elastomeric parts], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
2. Dyrda, V.I. (1988), *Prochnost i razrusheniye elastomernykh konstruktсий v ekstremalnykh usloviyakh* [Strength and fracture of elastomeric structures under extreme conditions], Naukova dumka, Kiev, USSR.
3. Frolov, V.K. (ed.) (1981), *Vibratsiya v tekhnike. Tom 6* [Vibration technique, Vol. 6], Mashinostroyeniye, Moscow, USSR.
4. Kilchevskiy, N.A. (1976), *Dinamicheskoye kontaktnoye szhatiye tvordykh tel. Udar* [Dynamic contact compression of solids. Blow], Naukova dumka, Kiev, USSR.
5. Dyrda, V.I., Grebenyuk, S.N. and Gomenyuk, S.I. (2012), *Analiticheskiye i chislennyye metody raschota rezinovykh detaley* [Analytical and numerical methods for calculating rubber parts], Zaporozhskiy natsional'nyy universitet, Dnepropetrovsk – Zaporozhye, Ukraine.

Об авторах

Калганков Евгений Васильевич, аспирант, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина

Новикова Алина Вячеславовна, магистр, младший научный сотрудник отдела механики эластомерных конструкций, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, a_v_novikova@mail.ru

About the authors

Kalgankov Evgeniy Vasilyevich, Ph. D. Student in Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine

Novikova Alina Vyacheslavovna, Master of Science (Tech.), Junior Researcher in Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, a_v_novikova@mail.ru

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

Аннотация. В работе рассматриваются вынужденные колебания одномассной системы с упругими связями на примере системы виброизоляции с резиновыми амортизаторами. Приведено решение задачи в линейной и нелинейной постановках. При этом в линейной постановке механическая реакция резины описывается интегральными соотношениями типа Больцмана-Вольтерра.

Ключевые слова: вынужденные колебания, виброизоляторы сжатия, эффективность виброизоляции, коэффициент виброизоляции

A.V. Novikova, Master of Science (Tech.), Junior Researcher
(IGTM NAS of Ukraine)

FORCED OSCILLATIONS OF SYSTEMS WITH ELASTIC BONDS

Abstract. We consider forced oscillations of one-mass system with elastic links on the example of vibration isolation system with rubber shock absorbers. Solutions of a problem in linear and nonlinear formulation are given. A mechanical reaction of rubber is described by integral relations Boltzman-Volterra type in the linear formulation.

Keywords: forced oscillations, compression vibroinsulators, vibration insulation effectiveness, vibration insulation coefficient

Введение. В настоящей работе рассматриваются вынужденные колебания системы с резиновыми упругими звеньями. Пример такой колебательной системы показан на рисунке 1 в виде окомкователя аглофабрик, установленного на резиновые виброизоляторы сжатия.

При эксплуатации таких машин наблюдаются значительные вибрации как самих машин, так и перекрытий зданий. Для уменьшения этих вибраций использовалась система виброизоляции.

Линейная постановка задачи. Уравнение колебаний одномассной системы (рис. 1) можно записать в виде [1]:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = P \sin \omega t . \quad (1)$$

где ω – частота вынужденных колебаний системы;

ω_0 – собственная частота колебаний системы;

P – амплитуда возмущающей силы.

Будем считать, что механическая реакция резины описывается интегральными соотношениями типа Больцмана-Вольтерра с ядрами релаксации и последствия. Тогда уравнение (1) в операторной форме можно записать так

